

四阶线性方程局部间断 Galerkin 方法的误差估计

毕 卉, 陈莎莎

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 研究了基于偏迎风数值通量的四阶线性偏微分方程局部间断 Galerkin 方法的稳定性和误差估计问题。考虑在空间方向上, 利用半离散形式的数值格式, 通过使用广义 Gauss-Radau 投影, 消除了数值通量产生的投影误差, 利用 Young 不等式得到数值格式的最优误差估计。证明了当对流项选择偏迎风数值通量, 方法的收敛阶为 $k + 1$ 阶。由于含有高阶空间导数的偏微分方程 LDG 方法的空间离散算子具有刚性, 因此对于时间离散采用二阶隐式 Crank-Nicolson 方法, 通过数值试验验证了理论分析结果的正确性。

关键词: 四阶线性偏微分方程; 局部间断 Galerkin 方法; 误差估计; 偏迎风通量; 广义 Gauss-Radau 投影

DOI: 10. 15938/j. jhust. 2021. 04. 022

中图分类号: O29 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2021)04-0159-08

Error Estimates for Local Discontinuous Galerkin Methods for Linear Fourth-order Equations

BI Hui, CHEN Sha-sha

(School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: This paper studies the stability and error estimates of the local discontinuous Galerkin method for fourth-order linear partial differential equations based on upwind-biased fluxes. Consider using the semi-discrete form of numerical format in the spatial direction and using the generalized Gauss-Radau projection, the projection error caused by the numerical flux is eliminated. The optimal error estimate of the numerical format is obtained by using Young inequality. It is proved that when the convective term is selected as the upwind-biased numerical fluxes, the convergence order of the method is order $k + 1$. Because the spatial discrete operator of the partial differential equation LDG method with higher-order spatial derivatives is rigid, the second-order implicit Crank-Nicolson method is used for time dispersion, and the correctness of the theoretical analysis results is verified by numerical experiments.

Keywords: fourth-order linear PDEs; local discontinuous Galerkin methods; error estimates; upwind-biased fluxes; generalized Gauss-Radau projection

收稿日期: 2020-04-17

基金项目: 国家自然科学基金(11901140); 哈尔滨理工大学“理工英才”计划基金(LGYC2018JC001)。

作者简介: 陈莎莎(1995—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 毕 卉(1982—), 女, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: bi_hui2002@aliyun.com.

0 引言

对流扩散方程是一类反映物质输运、分子扩散或黏性流体流动的数学模型,可以描述化学、流体力学、空气动力学等领域的众多物理现象,在天气预报、石油开采、半导体模拟等领域有着广泛的应用。因此,对流扩散方程的数值方法研究一直是偏微分方程数值解研究的重要课题之一。由于局部间断 Galerkin (local discontinuous galerkin, 简称 LDG) 方法具有良好的数值表现和数值实现的简便性,该方法已经成为求解高阶微分方程的热门方法之一。本文将求解以下的对流扩散方程,充分展示 LDG 方法的数值求解优势。

间断 Galerkin 有限元方法是由 Reed 和 Hill^[1] 于 1973 年在求解中子运输方程时首次提出。Johnson 和 Pitkäranta^[2] 将这个方法应用到标量线性双曲型方程上,并且研究了 L^p 范数意义下的误差估计问题。之后, Cockburn 等在文 [3-6] 中针对双曲型守恒律方程提出了 Runge-Kutta DG 方法。由于 Bassi 和 Rebay^[7] 应用 DG 方法成功地解决了可压缩的 Navier-Stokes 方程, Cockburn 和 Shu^[8] 受他们的启发,在解决对流扩散方程时第一次提出了局部间断 Galerkin 方法。LDG 方法的主要思想是先把对流扩散方程化为等价的一阶偏微分方程组,再使用 DG 方法进行空间离散。局部间断 Galerkin 方法是 DG 方法的推广,用于求解含有高阶空间导数的偏微分方程。目前,LDG 方法已经得到了广泛的发展和应用。Yan 和 Shu 将 LDG 方法应用到三阶 KdV 方程^[9],以及四阶和五阶偏微分方程^[10]。Xu 和 Shu 进一步将 LDG 推广到非线性波动方程^[11-13]、Schrödinger 方程^[14]、Hunter-Saxton 方程^[15]及 Surface diffusion 和 Willmore flow 方程^[16]等,更多见文 [20]。如何选取合适的数值流量来保证数值格式的稳定是 LDG 方法的核心。

传统上,线性双曲方程 DG 方法的数值通量通常选择迎风数值通量。但是,对于复杂的系统或非线性问题,迎风数值通量很难构造。因此,研究更一般的数值通量(如迎风偏通量)是必要且重要的。最近, Meng 等^[21] 研究了基于迎风通量线性守恒律方程 DG 方法的收敛性,证明了最优半离散 DG 方法的收敛阶为 $k+1$ 阶。Cao 等^[22] 基于迎风通量,研究了一维线性双曲型方程的 DG 方法超收敛性,发现 DG 解及其导数在一些特殊点处可

以得到 $k+1$ 阶和 $k+2$ 阶超收敛。本文研究了基于迎风数值通量的线性四阶偏微分方程 LDG 方法的误差估计。

论文第 2 节给出了线性四阶方程的 LDG 方法,证明了基于迎风通量四阶线性偏微分方程 LDG 方法的收敛阶为 $k+1$ 阶;在第 3 节中通过数值实验,验证了结果的正确性;在第 4 节中,给出了结论和未来的工作。

1 局部间断 Galerkin 方法

本文考虑以下的线性四阶方程:

$$u_t + u_x + u_{xxxx} = 0, (x, t) \in (0, 2\pi) \times [0, T] \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in I = (0, 2\pi) \quad (2)$$

边界条件取为周期边界条件。我们研究方程(1)基于迎风通量的局部间断 Galerkin 方法的误差估计问题。

1.1 符号定义

在对方程(1)提出半离散 LDG 方法之前,首先介绍常用符号。设剖分 $0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N+\frac{1}{2}} = 2\pi$, 将计算区域 $I = (0, 2\pi)$ 分为 N 个单元,记 $I_j = (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$ 为第 j 个单元,其单元中心和单元长度分别记为 $x_j = \frac{x_{j-\frac{1}{2}} + x_{j+\frac{1}{2}}}{2}$ 和 $h_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$, 记 $h = \max h_j$, 这里假设网格是正则的。间断有限元空间定义为

$$V_h^k = \{v \in L^2(I) : v|_{I_j} \in P^k(I_j), j=1, \dots, N\}$$

其中 $P^k(I_j)$ 表示区间 $I_j = (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$ 上次数不超过 k 次的多项式集合。

对于非负整数 l , $W^{l,2}(I_j)$ 和 $W^{l,\infty}(I_j)$ 表示定义在 I_j 上的标准 Sobolev 空间,其范数分别记为 $\|\cdot\|_{W^{l,2}(I_j)}$ 和 $\|\cdot\|_{W^{l,\infty}(I_j)}$ 。进而分裂 Sobolev 空间定义为

$$W^{l,p}(I_h) := \{v \in L^2(I) : v|_{I_j} \in W^{l,p}(I_j), j=1, \dots, N\}$$

$$p=2, \infty$$

其范数定义为

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{l,2}(I_h)} &= \|u\|_{H^l(I_h)} = \left(\sum_{j=1}^N \|u\|_{W^{l,2}(I_j)}^2 \right)^{1/2} \\ \|u\|_{W^{l,\infty}(I_h)} &= \max_{1 \leq j \leq N} \|u\|_{W^{l,\infty}(I_j)} \end{aligned}$$

为方便起见,当 $l=0$ 时,记 $\|\cdot\|_{H^0(I_h)}$ 为 $\|\cdot\|_0$ 。

定义 $v_{j+1/2}^+$ 和 $v_{j+1/2}^-$ 分别为函数 $v(x)$ 在 $x_{j+1/2}$ 点处的左右极限, $[v]_{j+1/2} = v_{j+1/2}^+ - v_{j+1/2}^-$ 和 $\{v_h\}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(v_{j+1/2}^+ + v_{j+1/2}^-)$ 分别表示函数 $v(x)$ 在单元边界点

上的跳跃和平均值。

为了后面定理的证明,还需给出全局投影的定义和性质。对于任意 $u \in H^1(I_h)$, 投影 $p_h^* u(x) \in V_h^k$ 定义如下:

$$\int_{I_j} p_h^* u(x) v(x) dx = \int_{I_j} u(x) v(x) dx, \forall v \in P^{k-1}(I_j) \\ \hat{p}_h^* u = \hat{u}, \text{在 } x_{j+1/2}, j=1, \dots, N \quad (3)$$

下面的引理给出了全局投影的存在性和最佳逼近性。

引理 1 [2] 假设 u 充分光滑且具有周期性, 存在唯一满足式(3)的 p_h^* , 满足如下性质:

$$\|u - p_h^* u\|_{L^\infty(I_j)} \leq Ch^{k+1} \|u\|_{W^{k+1,\infty}(I_h)} \\ \|u - p_h^* u\| \leq Ch^{k+\frac{3}{2}} \|u\|_{W^{k+1,\infty}(I_h)}$$

其中 $C = C(\theta)$ 不依赖于 I_j 和 h 。

接下来,对于线性问题引入 DG 离散算子。对于 $p, q \in V_h^k$ 以及单元 $I_j = (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$, 定义如下 DG 离散算子:

$$H_j^\pm(p, q) = \int_{I_j} pq_x dx - \bar{p}q^-|_{j+\frac{1}{2}} + \bar{p}q^+|_{j-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$H_j^-(p, q) = \int_{I_j} pq_x dx - p^- q^-|_{j+\frac{1}{2}} + p^- q^+|_{j-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$H_j^+(p, q) = \int_{I_j} pq_x dx - p^+ q^-|_{j+\frac{1}{2}} + p^+ q^+|_{j-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

并记

$$H^\pm(p, q) = \sum_j H_j^\pm(p, q)$$

$$H^+(p, q) = \sum_j H_j^+(p, q)$$

$$H^-(p, q) = \sum_j H_j^-(p, q)$$

对于 DG 离散算子,有下面的性质。

引理 2 对于周期边界条件,选择不同数值通量, DG 离散算子都满足下列等式

$$H^+(p, q) + H^-(q, p) = 0$$

1.2 LDG 格式和误差估计

1.2.1 LDG 格式

构造 LDG 格式,首先引入一些近似于解的各阶导数的辅助变量,并将方程(1)重写为一阶系统

$$u_t + u_x + v_x = 0, v - z_x = 0, \\ z - q_x = 0, q - u_x = 0 \quad (7)$$

接下来定义方程(7)的半离散 LDG 格式: 对于任意的 $\eta_h, \rho_h, \omega_h, \sigma_h \in V_h^k$, 都有 $u_h, v_h, z_h, q_h \in V_h^k$ 满足

$$\int_{I_j} (u_h)_t \eta_h dx - \int_{I_j} u_h (\eta_h)_x dx + \bar{u}_h \eta_h^-|_{j+1/2} - \bar{u}_h \eta_h^+|_{j-1/2} - \\ \int_{I_j} v_h \rho_h dx + \bar{v}_h \rho_h^-|_{j+1/2} - \bar{v}_h \rho_h^+|_{j-1/2} = 0 \quad (8)$$

$$\int_{I_j} v_h \rho_h dx + \int_{I_j} z_h (\rho_h)_x dx - \bar{z}_h \rho_h^-|_{j+1/2} + \bar{z}_h \rho_h^+|_{j-1/2} = 0 \quad (9)$$

$$\int_{I_j} z_h \omega_h dx + \int_{I_j} q_h (\omega_h)_x dx - \bar{q}_h \omega_h^-|_{j+1/2} + \bar{q}_h \omega_h^+|_{j-1/2} = 0 \quad (10)$$

$$\int_{I_j} q_h \sigma_h dx + \int_{I_j} u_h (\sigma_h)_x dx - \bar{u}_h \sigma_h^-|_{j+1/2} + \bar{u}_h \sigma_h^+|_{j-1/2} = 0 \quad (11)$$

对于周期边界条件,对流项数值通量取迎风通量

$$\bar{u}_h = \theta u_h^- + (1 - \theta) u_h^+ \quad (12)$$

其中 $\theta > \frac{1}{2}$ 。扩散项数值流通量选取交错流通量

$$\hat{v}_h = v_h^+, \hat{z}_h = z_h^-, \hat{q}_h = q_h^+, \hat{u}_h = u_h^- \quad (13)$$

定义如下记号:

$$e_u = u - u_h = (u - p_h^*(u)) - (u_h - p_h^*(u)) = \varphi_u - \psi_u$$

$$e_v = v - v_h = (v - p_h^*(v)) - (v_h - p_h^*(v)) = \varphi_v - \psi_v$$

$$e_z = z - z_h = (z - p_h^*(z)) - (z_h - p_h^*(z)) = \varphi_z - \psi_z$$

$$e_q = q - q_h = (q - p_h^*(q)) - (q_h - p_h^*(q)) = \varphi_q - \psi_q$$

对于初始条件,取 $u_h(0) = \Pi_h(u_0)$, 并且满足

$$\|u_0 - \Pi_h(u_0)\| \leq Ch^{k+1} \|u_0\|_{H^{k+1}(I_h)}$$

这里的 Π_h 表示到 V_h^k 的 L^2 投影。

1.2.2 稳定性分析

基于迎风数值通量的线性四阶方程 LDG 方法满足如下 L^2 稳定性。

定理 1(稳定性) 由式(8)~(11)定义的半离散 LDG 格式,当数值通量取为式(12)和(13)时,满足

$$\|u_h(T)\| \leq \|u_h(0)\|$$

证明: 分别取式(8)~(11)中的检验函数 $\eta_h, \rho_h, \omega_h, \sigma_h$ 为 $u_h, q_h, z_h, -v_h$, 将式(8)~(11)中各式相加,并对 j 求和,根据算子式(4)~(6)的定义,可以得到如下方程

$$((u_h, u_h) - H^\pm(u_h, u_h) - H^+(v_h, u_h) + \\ (v_h, q_h) + H^-(z_h, q_h) + (z_h, z_h) + \\ H^+(q_h, z_h) + (q_h, -v_h) + H^-(u_h, -v_h) = 0$$

根据引理 2,进而得到以下等式

$$((u_h)_t, u_h) - H^\pm(u_h, u_h) + (z_h, z_h) = 0$$

由周期边界条件,得到

$$\int_I (u_h)_t u_h dx + \sum_{j=1}^N ((\{u_h\} - \bar{u}_h) [u_h])_{j+1/2} + (z_h, z_h) = 0$$

根据偏迎风数值通量式(12)的定义,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 + (\theta - \frac{1}{2}) \sum_{j=1}^N [u_h]_{j+1/2}^2 + \|z_h\|^2 = 0$$

当 $\theta > \frac{1}{2}$, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 \leq 0 \quad (14)$$

对不等式(14)在0到T之间对时间积分,可以得到 L^2 稳定性结果,证明完成。

1.2.3 误差估计

定理2 (误差估计) 假设 u, v, z, q 是方程(7)的精确解并且充分光滑, u_h, v_h, z_h, q_h 是式(8)~(11)的解。其中初值投影为 Π_h , 流通量的选取如(12)和(13)所示。对于 $I = (0, 2\pi)$ 的均匀网格, 使用分段多项式有限元空间 $V_h^k (k \geq 1)$, 对于充分小的 h 和任意 $T > 0$, 有如下误差估计成立

$$\|e_u(T)\| \leq Ch^{k+1}(1+T)$$

其中正整数 C 与 θ , $\|u\|_{W^{k+1,\infty}(I_h)}$, $\|u_t\|_{W^{k+1,\infty}(I_h)}$ 有关, 但与 h 无关。

证明: 根据算子式(4)~(6)的记号, 将式(8)~(11)各式分别对 j 求和, 并且将各式相加得到以下等式

$$\begin{aligned} & ((u_h)_t, \eta_h) - H^\pm(u_h, \eta_h) - H^+(v_h, \eta_h) + \\ & (v_h, \rho_h) + H^-(z_h, \rho_h) + (z_h, \omega_h) + \\ & H^+(q_h, \omega_h) + (q_h, \sigma_h) + H^-(u_h, \sigma_h) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

由于 u, v, z, q 是式(7)的精确解, 所以它们也是式(8)~(11)的解。故根据式(15), 有

$$\begin{aligned} & ((u)_t, \eta_h) - H^\pm(u, \eta_h) - H^+(v, \eta_h) + \\ & (v, \rho_h) + H^-(z, \rho_h) + (z, \omega_h) + \\ & H^+(q, \omega_h) + (q, \sigma_h) + H^-(u, \sigma_h) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

将式(15)和(16)两式相减, 可以得到如下方程

$$\begin{aligned} & ((e_u)_t, \eta_h) - H^\pm(e_u, \eta_h) - H^+(e_v, \eta_h) + \\ & (e_v, \rho_h) + H^-(e_z, \rho_h) + (e_z, \omega_h) + \\ & H^+(e_q, \omega_h) + (e_q, \sigma_h) + H^-(e_u, \sigma_h) = 0 \end{aligned}$$

通过符号 e_u, e_v, e_z, e_q 的定义, 并且对上式取

$\eta_h, \rho_h, \omega_h, \sigma_h$ 分别为 $\psi_u, \psi_v, \psi_z, \psi_q$, 得到

$$\begin{aligned} & ((\psi_u)_t, \psi_u) - H^\pm(\psi_u, \psi_u) - H^+(\psi_v, \psi_u) + \\ & (\psi_v, \psi_v) + H^-(\psi_z, \psi_v) + (\psi_z, \psi_z) + \\ & H^+(\psi_q, \psi_z) + (\psi_q, \psi_q) + H^-(\psi_u, \psi_q) = \\ & ((\phi_u)_t, \psi_u) - H^\pm(\phi_u, \psi_u) - H^+(\phi_v, \psi_u) + \end{aligned}$$

$$(\phi_v, \psi_v) + H^-(\phi_z, \psi_v) + (\phi_z, \psi_z) + H^+(\phi_q, \psi_z) + (\phi_q, \psi_q) + H^-(\phi_u, \psi_q)$$

考虑以下的算子:

$$\begin{aligned} H(\phi_v, \psi_u) &= (\phi_v, (\psi_u)_x) - \\ & \sum_{j=1}^N \hat{\phi}_{v_{j+\frac{1}{2}}} \psi_{u_{j+\frac{1}{2}}}^- + \sum_{j=1}^N \hat{\phi}_{v_{j-\frac{1}{2}}} \psi_{u_{j-\frac{1}{2}}}^- \end{aligned}$$

其中 $(\phi_v, (\psi_u)_x) = \int_I (v - p_h^*(v)) \cdot (\psi_u)_x dx = 0$,

$\phi_{v_{j+\frac{1}{2}}} = (v - \hat{p}_h^*(v))_{j+\frac{1}{2}} = (\hat{v} - \hat{p}_h^*(v))_{j+\frac{1}{2}}$, 因此得到

以下等式

$$\begin{aligned} & ((\psi_u)_t, \psi_u) - H^\pm(\psi_u, \psi_u) + \\ & (\psi_v, \psi_v) + (\psi_z, \psi_z) + (\psi_q, \psi_q) = \\ & ((\phi_u)_t, \psi_u) + (\phi_v, \psi_v) + \\ & (\phi_z, \psi_z) + (\phi_q, \psi_q) \end{aligned} \quad (17)$$

进一步分析等式(17), 由于

$$-H^\pm(\psi_u, \psi_u) = (\theta - \frac{1}{2}) \sum_{j=1}^N [u_h]_{j+\frac{1}{2}}^2$$

根据引理1, 有

$$\|(\phi_u)_t\| \leq Ch^{k+1} \|u_t\|_{H^{k+1}(I_h)} \text{ 以及 } \|\phi_u\| \leq Ch^{k+1} \|u\|_{H^{k+1}(I_h)}$$

类似地, 对于 ϕ_v, ϕ_z, ϕ_q 也有以上的估计, 将等

式(17)的右侧记为 RHS, 于是有

$$\begin{aligned} RHS &\leq Ch^{k+1} \|u_t\|_{H^{k+1}(I_h)} \|\psi_u\| + \\ & Ch^{k+1} \|v_t\|_{H^{k+1}(I_h)} \|\psi_v\| + \\ & Ch^{k+1} \|z_t\|_{H^{k+1}(I_h)} \|\psi_z\| + \\ & Ch^{k+1} \|q_t\|_{H^{k+1}(I_h)} \|\psi_q\| \end{aligned}$$

进一步, 根据 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} RHS &\leq T^{-1} \|\psi_u\|^2 + Ch^{2k+2} \|u_t\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \\ & \|\psi_v\|^2 + Ch^{2k+2} \|v_t\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \\ & \|\psi_z\|^2 + Ch^{2k+2} \|z_t\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \\ & \|\psi_q\|^2 + Ch^{2k+2} \|q_t\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 \end{aligned}$$

因为 $\theta > \frac{1}{2}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi_u\|^2 &\leq T^{-1} \|\psi_u\|^2 + TCh^{2k+2} (T \|u_t\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \\ & \|v\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \|z\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \|q\|_{H^{k+1}(I_h)}^2) \end{aligned} \quad (18)$$

通过对不等式(18)在0到T之间对时间积分, 有

$$\begin{aligned} \|\psi_u(T)\|^2 &\leq C \|\psi_u(0)\|^2 + TCh^{2k+2} (T \|u_t\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \\ & \|v\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \|z\|_{H^{k+1}(I_h)}^2 + \|q\|_{H^{k+1}(I_h)}^2) \end{aligned}$$

$u_h(0)$ 在 L^2 上的初值为 $\Pi_h(0)$, 于是

$$\|\psi_u(0)\| = \|\Pi_h u_0 - u_0 + u_0 - p_h^* u_0\|$$

$$\leq \| \Pi_h u_0 - u_0 \| + \| u_0 - p_h^* u_0 \| \leq Ch^{k+1}$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} \| \psi_u(T) \|^2 &\leq Ch^{2k+2} + T^2 Ch^{2k+2} + TCh^{2k+2} \\ &\leq (T+1)^2 Ch^{2k+2} \\ \| \psi_u(T) \| &\leq (T+1) Ch^{k+1} \\ \| e_u(T) \| &\leq \| \varphi_u(T) \| - \| \psi_u(T) \| \\ &\leq Ch^{k+1}(1+T) + Ch^{k+1} \leq Ch^{k+1}(1+T) \end{aligned}$$

证毕。

2 数值实验

本节将给出一些支持结论的数值实验。在实验中,时间离散选择二阶隐式 Crank-Nicolson 方法,这种方法能够对实验进行长时间形态的研究。

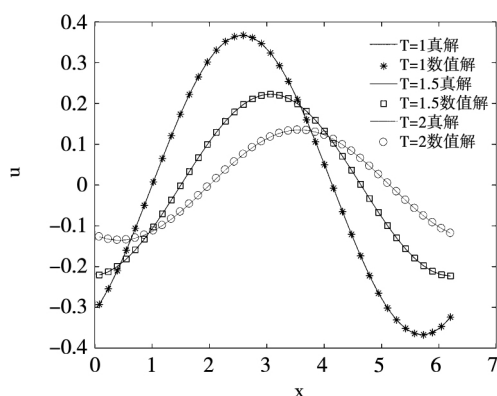


图1 $k=1, N=40$ 时不同时刻真解与数值解对比图
Fig. 1 Comparison of true and numerical solutions at different times when $k=1, N=40$

例1 考虑以下方程

$$\begin{aligned} u_t + u_x + u_{xxxx} &= 0, (x, t) \in (0, 2\pi) \times [0, T] \\ u(x, 0) &= \sin x, x \in I = (0, 2\pi) \end{aligned}$$

方程的真解为 $u(x, t) = e^{-t} \sin(x - t)$

接下来给出真解与数值解在不同时刻的图像比较。图1和图2分别给出了当 $k=1, N=40$ 时在 $T=1, T=1.5, T=2$ 时刻,以及 $T=10, T=11, T=12$ 时刻对应的数值解以及真解。图3和图4分别给出了当 $k=2, N=40$ 时,在 $T=1, T=1.5, T=2$,以及 $T=10, T=11, T=12$ 时刻分别对应的数值解以及真解。数值实验表明不同时刻的数值解对真解有很好的拟合效果,特别是随着时间 T 的增大,数值解仍能对真解保持很好的逼近效果,这表明该方法具有较好的稳定性。

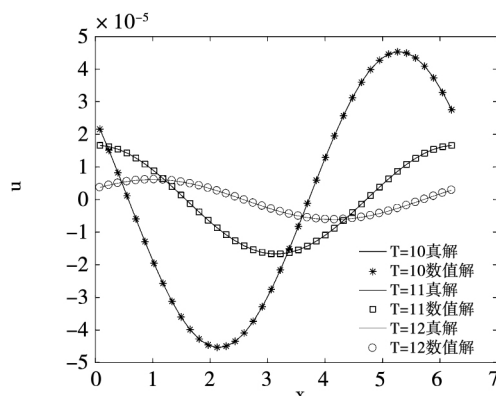


图2 $k=1, N=40$ 时不同时刻真解与数值解对比图
Fig. 2 Comparison of true and numerical solutions at different times when $k=1, N=40$

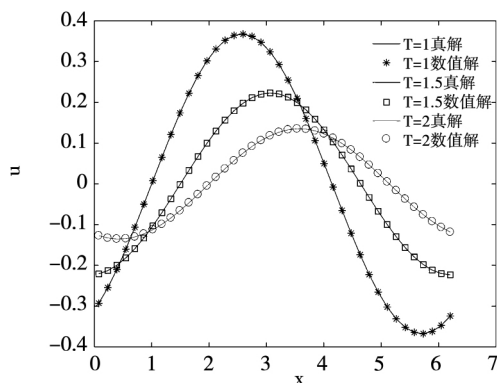


图3 $k=2, N=40$ 时不同时刻真解与数值解对比图
Fig. 3 Comparison of true and numerical solutions at different times when $k=2, N=40$

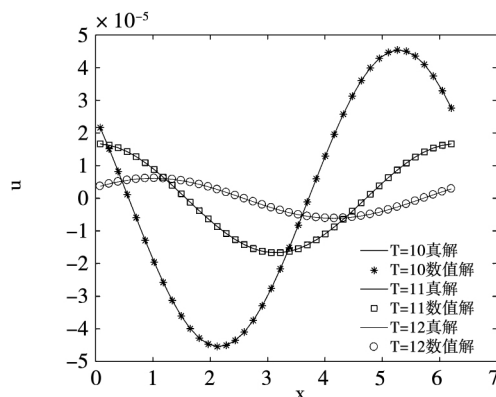


图4 $k=2, N=40$ 时不同时刻真解与数值解对比图
Fig. 4 Comparison of true and numerical solutions at different times when $k=2, N=40$

进而对方法的误差和收敛阶进行分析。在表1和表2中,时间步长选择 $\tau = 0.01h^2$;在表3和表4中,时间步长选择 $\tau = 0.01h^4$,计算终止时刻分别取为 $T = 1$ 及 $T = 10$ 。通过对收敛阶的计算发现,当数

值流通量取为偏迎风通量时,对于不同的 θ 值,收敛阶可以达到 $k + 1$ 阶精度,特别是对于长效时间,如 $T = 10$ 时,收敛阶仍可达到 $k + 1$ 阶,验证了定理2的结论。

表1 当使用初值的 p_h^* 投影和 P^1 多项式时在时刻 $T = 1$ 的数值误差和精度

Tab.1 Numerical errors and accuracy when p_h^* projection and P^1 polynomial are used at $T = 1$

N	$\theta = 0.75$		$\theta = 1$		$\theta = 2$	
	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶
10	0.0160	—	0.0162	—	0.0177	—
20	0.0040	2.0011	0.0040	2.0111	0.0042	2.0897
40	9.8057×10^{-4}	2.0281	9.8145×10^{-4}	2.0354	9.8807×10^{-4}	2.0759
80	2.4746×10^{-4}	1.9864	2.4770×10^{-4}	1.9863	2.4888×10^{-4}	1.9892

表2 当使用初值的 p_h^* 投影和 P^1 多项式时在时刻 $T = 10$ 的数值误差和精度

Tab.2 Numerical errors and accuracy when p_h^* projection and P^1 polynomial are used at $T = 10$

N	$\theta = 0.75$		$\theta = 1$		$\theta = 2$	
	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶
10	2.3265×10^{-6}	—	3.2408×10^{-6}	—	7.9742×10^{-6}	—
20	5.2977×10^{-7}	2.1347	6.1984×10^{-7}	2.3864	1.1771×10^{-6}	2.7601
40	1.2485×10^{-7}	2.0852	1.3179×10^{-7}	2.2337	1.8396×10^{-7}	2.6778
80	3.0374×10^{-8}	2.0393	3.0771×10^{-8}	2.0986	3.4500×10^{-8}	2.4147

表3 当使用初值的 p_h^* 投影和 P^2 多项式时在时刻 $T = 1$ 的数值误差和精度

Tab.3 Numerical errors and accuracy when p_h^* projection and P^2 polynomial are used at $T = 1$

N	$\theta = 0.75$		$\theta = 1$		$\theta = 2$	
	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶
10	9.5809×10^{-4}	—	9.5966×10^{-4}	—	9.6613×10^{-4}	—
20	9.8682×10^{-5}	3.2793	9.8680×10^{-5}	3.2817	9.8674×10^{-5}	3.2915
40	1.2435×10^{-5}	2.9884	1.2435×10^{-5}	2.9883	1.2437×10^{-5}	2.9981
80	1.5523×10^{-6}	3.0019	1.5531×10^{-6}	3.0012	1.5532×10^{-6}	3.0013

表4 当使用初值的 p_h^* 投影和 P^2 多项式时在时刻 $T = 10$ 的数值误差和精度

Tab.4 Numerical errors and accuracy when p_h^* projection and P^2 polynomial are used at $T = 10$

N	$\theta = 0.75$		$\theta = 1$		$\theta = 2$	
	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶
10	1.8706×10^{-7}	—	1.9043×10^{-7}	—	2.0475×10^{-7}	—
20	2.0524×10^{-8}	3.1882	2.0622×10^{-8}	3.2070	2.1023×10^{-8}	3.2838
40	2.5462×10^{-9}	3.0109	2.5465×10^{-9}	3.0176	2.5467×10^{-9}	3.0453
80	2.9319×10^{-10}	3.1184	2.9321×10^{-10}	3.1185	2.9324×10^{-10}	3.1185

例2 考虑以下方程

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (x, t) \in (0, 2\pi) \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = \cos x$$

方程的真解为

$$u(x, t) = e^{-t} \cos(x - t)$$

图5和图6分别给出当 $k = 2, N = 40$ 时 $T = 1$ 、

$T=1.5$ 、 $T=2$, 以及 $T=10$ 、 $T=11$ 、 $T=12$ 时刻对应的数值解以及真解。

表 5 和表 6 中给出了当 $T=1$ 时, 采用偏迎风数

值流通量, 当 $k=1$ 和 $k=2$ 时的误差和收敛阶精度。数值结果表明收敛阶均可达到 $k+1$ 阶, 验证了定理 2 的结论。

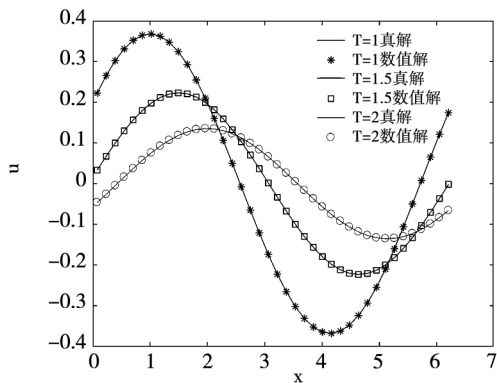


图 5 不同时刻真解与数值解对比图

Fig. 5 Comparison of true and numerical solutions at different times

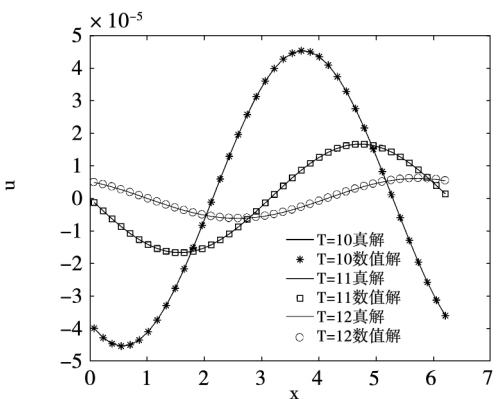


图 6 不同时刻真解与数值解对比图

Fig. 6 Comparison of true and numerical solutions at different times

表 5 当使用初值的 p_h^* 投影和 P^1 多项式时在时刻 $T=1$ 的数值误差和精度

Tab. 5 Numerical errors and accuracy when p_h^* projection and P^1 polynomial are used at $T=1$

N	$\theta=0.75$		$\theta=1$		$\theta=2$	
	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶
—	10	0.0160	—	0.0162	—	0.0177
20	0.0040	2.0011	0.0040	2.0111	0.0042	2.0897
40	9.8057×10^{-4}	2.0281	9.8145×10^{-4}	2.0354	9.8807×10^{-4}	2.0759
80	2.4746×10^{-4}	1.9864	2.4770×10^{-4}	1.9863	2.4888×10^{-4}	1.9892

表 6 当使用初值的 p_h^* 投影和 P^2 多项式时在时刻 $T=1$ 的数值误差和精度

Tab. 6 Numerical errors and accuracy when p_h^* projection and P^2 polynomial are used at $T=1$

N	$\theta=0.75$		$\theta=1$		$\theta=2$	
	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶	L^2 误差	阶
10	0.0021	—	0.0021	—	0.0021	—
20	2.6143×10^{-4}	3.0131	2.6152×10^{-5}	3.0145	2.6187×10^{-4}	3.0201
40	3.0239×10^{-5}	3.1119	3.0241×10^{-4}	3.1123	3.0253×10^{-4}	3.1137
80	1.7363×10^{-6}	4.1223	1.7386×10^{-6}	4.1206	1.7381×10^{-6}	4.1214

以上算例表明, 当对流项数值通量选取偏迎风通量, 扩散项数值流通量选择交替流通量, 局部间断 Galerkin 有限元解对真解有较好的逼近效果, 且具有较好的长效性, 这为进一步研究该方法的稳定性提供了数值保障。同时通过对误差和收敛阶的计算, 得到当使用初值的 p_h^* 投影和 P^1 以及 P^2 多项式在不同时刻的收敛阶均可达到 $k+1$ 阶, 验证了本

文对四阶线性对流扩散方程的 LDG 方法的误差估计结果。

3 结 论

本文讨论了四阶线性对流扩散方程 LDG 方法的稳定性以及误差估计问题。证明了当对流项选择

偏迎风流量,扩散项选择交错流量时,LDG 方法在 P^k ($k \geq 1$) 分片多项式有限元空间中的误差估计的阶为 $k+1$ 。通过数值实验,验证了误差估计的理论分析是正确的。接下来将进一步研究高阶方程基于偏迎风数值流量的数值稳定性问题,从理论上分析求解高阶微分方程 LDG 方法的数值特性。

参 考 文 献:

- [1] REED W H, HILL T R. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation [R]. Los Alamos Report LA-UR-73-479; 1973.
- [2] Pitkäranta, C Johnson. An Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for a Scalar Hyperbolic Equation [J]. Mathematics of Computation, 1986, 46(173): 1.
- [3] COCKBURN B, LIN S Y & SHU C W. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element method for Conservation Laws III: One-dimensional Systems [J]. Journal of Computational Physics, 1989, 84(1): 903.
- [4] COCKBURN B, HOU C W, SHU C W. The Runge-kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws. iv: the Multidimensional Case. Mathematics of Computation, 1990, 54(190): 545.
- [5] COCKBURN B, SHU C W. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework [J]. Mathematics of Computation, 1989, 52(186): 411.
- [6] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V [J]. Journal of Computational Physics, 1997, 141(2): 199.
- [7] BASSI F, REBAY S. A high-order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations [J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131(2): 267.
- [8] SHU C W. The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(6): 2440.
- [9] CHENG Y, MENG X, ZHANG Q. Application of Generalized Gauss-Radau Projections for the Local Discontinuous Galerkin Method for Linear Convection-diffusion Equations [J]. Mathematics of Computation, 2016, 86(305): 1233.
- [10] CHENG Y, ZHANG Q. Local Analysis of the Local Discontinuous Galerkin Method with Generalized Alternating Numerical Flux for One-Dimensional Singularly Perturbed Problem [J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 72(2): 792.
- [11] CHENG Y, ZHANG Q, Wang H J. Local Analysis of the Local Discontinuous Galerkin Method with Generalized Alternating Numerical Flux for Two-Dimensional Singularly Perturbed Problem. Int. J. Numer. Anal. Mod. 2018, 15: 785.
- [12] YAN J, SHU C W. A Local Discontinuous Galerkin Method for KdV Type Equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 40(2): 769.
- [13] YAN J, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Methods for Partial Differential Equations with Higher Order Derivatives [J]. Journal of Scientific Computing, 2002, 17(1): 27.
- [14] SHU C W, XU Y. Local Discontinuous Galerkin Methods For Three Classes Of Nonlinear Wave Equations [J]. Journal of Computational Mathematics, 2004, 22(2): 250.
- [15] XU Y, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Methods for Two Classes of Two-dimensional Nonlinear Wave Equations [J]. Physica D, 2005, 208(1-2): 21.
- [16] XU Y, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Methods for Nonlinear Schrodinger Equations [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 208(1): 72.
- [17] SHU C W. A Local Discontinuous Galerkin Method for the Camassa-Holm Equation [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008, 46(4): 1998.
- [18] XU Y, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Method for the Hunter-Saxton Equation and Its Zero-Viscosity and Zero-Dispersion Limits [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2009, 31(2): 1249.
- [19] XU Y, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Method for Surface Diffusion and Willmore Flow of Graphs [J]. Journal of Scientific Computing, 2009, 40(1/3): 375.
- [20] XU Y, SHU C W. Local Discontinuous Galerkin Methods for High-order Time-dependent Partial Differential Equations. Commun. Comput. Phys., 2010, 7: 1.
- [21] MENG X, SHU C W, Wu B Y. Optimal Error Estimates for Discontinuous Galerkin Methods Based on Upwind-biased Fluxes for Linear Hyperbolic Equations [J]. Mathematics of Computation, 2016, 85: 1225.
- [22] CAO W, LI D, YANG Y et al. Superconvergence of Discontinuous Galerkin Methods Based on Upwind-biased Fluxes for 1D Linear Hyperbolic Equations [J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2017, 51(2): 467.
- [23] XU Y, SHU C W. Optimal Error Estimates of the Semidiscrete Local Discontinuous Galerkin Methods for High Order Wave Equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2012, 50: 79.
- [24] 毕卉, 钱琛庚. 显式 Runge-Kutta 局部间断 Galerkin 方法的稳定性分析 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2017, 22(6): 109.
- BI Hui, QIAN Chengeng. Stability Analysis of the Explicit Runge-kutta Local Discontinuous Galerkin Method [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2017, 22(6): 109.

(编辑: 温泽宇)